

## 種々の多変数ホークス過程のExact Simulation

著者	吉田 賢樹
出版者	法政大学大学院理工学・工学研究科
雑誌名	法政大学大学院紀要．理工学・工学研究科編
巻	62
ページ	1-8
発行年	2021-03-24
URL	<a href="http://doi.org/10.15002/00024019">http://doi.org/10.15002/00024019</a>

# 種々の多変数ホークス過程の Exact Simulation

## EXACT SIMULATION OF VARIOUS MULTIVARIATE HAWKES PROCESSES

吉田 賢樹

Toshiki YOSHIDA

指導教員 安田 和弘

法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻修士課程

In this paper, we introduce various Hawkes processes such as multivariate Hawkes processes with CIR intensity, multivariate Hawkes processes with Jump-diffusion CIR intensity and multivariate Hawkes processes with Non-Gaussian intensity and derive their exact simulations which generate unbiased sample paths. These processes introduced in this paper are generalised multivariate Hawkes processes, which possess useful characteristics for modeling events with contagion and clustering in finance, insurance and other fields. In addition to the exact simulation, for comparison we introduce two discretization schemes which generate sample paths approximately via discretizing time. One is simulation scheme adopting Euler-Maruyama approximation for renewing the intensity process, and the other is simulation scheme adopting exact simulation for renewing the intensity process. In the numerical result, for each stochastic process, we verify the validity and efficiency of exact simulation and discretization schemes and compare these simulation schemes. In addition, we present some applications in insurance and show the availability of these simulation schemes.

**Key Words :** *Hawkes process; Multivariate Hawkes processes; Multivariate Hawkes processes with CIR intensity; Multivariate Hawkes processes with Jump-diffusion CIR intensity; Multivariate Hawkes processes with Non-Gaussian intensity; exact simulation; discretization scheme; Monte Carlo simulation*

### 1. はじめに

ホークス過程は、クラスターや伝播の特徴をもつイベント到着をモデリングするため Hawkes [6] によって提案された確率過程であり、ファイナンスや保険、その他の分野で応用されている。ホークス過程の多変数版である多変数ホークス過程についても Hawkes [6] で紹介されており、Dassios et al. [3] は強度に外部影響を表す複合ポアソン過程を加えたホークス過程を導入している。

確率過程のシミュレーションは、リスクマネジメントや解析的に得ることが難しい破産確率、複雑なファイナンスデリバティブ価格やリスク量を算出するうえで使われる。そのため様々な種類の確率過程についてそのシミュレーション方法が考案されてきた。ホークス過程も同様にその性質や応用のほか、シミュレーション方法について研究されている。Dassios et al. [2] はホークス過程について、シミュレーションバイアスが出ない Exact Simulation を提案した。

ホークス過程の一般化として、CIR 強度をもつホークス過程と Jump-diffusion CIR 強度をもつホークス過程がある。CIR 強度、Jump-diffusion CIR 強度をもつホークス過程は Dassios et al. [5] によって導入された。CIR 強度をもつホークス過程はホークス過程の強度に CIR タイプの拡散項が加

えられており、Jump-diffusion CIR 強度は CIR 強度をもつホークス過程の強度に複合ポアソン過程が加えられている。シミュレーション方法については、Dassios et al. [4] により Exact Simulation と離散スキームが与えられている。CIR 強度をもつホークス過程の多変数版である CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation についても、Dassios et al. [4] で紹介されているが、理論背景が不明確という問題がある。そこで本論文では、CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation を理論的背景から構築する。加えて、離散スキームを与え、構築した Exact Simulation との比較を行う。また、Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程についても、Exact Simulation と離散スキームを与える。

その他のホークス過程の一般化として Non-Gaussian 強度をもつホークス過程がある。Non-Gaussian 強度をもつホークス過程は Qu et al. [7] によって導入された。Non-Gaussian 強度をもつホークス過程とは、強度に Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck (OU) model (Barndorff-Nielsen et al.[1]) を加えたホークス過程である。Non-Gaussian OU model は Ornstein-Uhlenbeck 過程に含まれるブラウン運動を Lévy 過程、特に正の純粋なジャンプのみをもつ Lévy 過程に替え

た確率過程である。正の純粋なジャンプのみをもつ Lévy 過程は subordinator, 別名で Background driven Lévy Process (BDLP) と呼ばれ, 例にガンマ過程と Tempered Stable subordinator をもつ。Qu et al. [7] は Lévy 過程としてこれら 2 つの例を用いて, Non-Gaussian 強度をもつホークス過程の諸性質や Exact Simulation, ファイナンスへの応用を与えている。また, Qu et al. [7] は, Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation を将来の課題として挙げている。そこで本論文では, Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact simulation, 離散スキームを与える。

なお, 本紀要では各種確率過程の Exact Simulation の結果のみを与える。離散スキームの詳細は本論文で与えている。

## 2. CIR 強度をもつ多変数ホークス過程

Dassios et al.[4] を参考に, CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の定義と 1 次モーメントを与える。

**定義 1** (CIR 強度をもつ多変数ホークス過程)

$j \in \{1, 2, \dots, d\}$  番目の CIR 強度をもつホークス過程は非負の  $\mathcal{F}_t$ -強度

$$\lambda_t^{[j]} = a^{[j]} + (\lambda_0^{[j]} - a^{[j]})e^{-\delta^{[j]}t} + \sigma^{[j]} \int_0^t e^{-\delta^{[j]}(t-s)} \sqrt{\lambda_s^{[j]}} dW_s^{[j]} \\ + \sum_{l=1}^d \sum_{0 \leq T_i^{[l]} < t} Y_i^{[j,l]} e^{-\delta^{[j]}(t-T_i^{[l]})}$$

をもつ計数過程

$$N_t^{[j]} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}\{T_i^{[j]} \leq t\}$$

である。ただし,

- $\mathcal{F}_t$  は  $\{\lambda_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  が適合となる計数過程  $\{N_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  のフィルトレーション。
- $T_i^{[j]}$  は  $j$  番目の計数過程  $N_t^{[j]}$  の  $i$  番目のイベント到着時刻,
- $\lambda_0^{[j]} > 0$  は  $j$  番目の強度の初期強度,
- $a^{[j]} \geq 0$  は  $j$  番目の強度の回帰レベル,
- $\delta^{[j]} > 0$  は  $j$  番目の強度の回帰率,
- $\sigma^{[j]} > 0$  は  $j$  番目の強度の拡散係数,
- $\{W_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  は互いに独立で,  $\{N_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  と独立な標準ブラウン運動,
- $\{Y_i^{[j,l]}\}_{i=1,2,\dots}$  は密度関数  $G^{[j,l]}(y_{j,l}), y_{j,l} \geq 0$  をもつ  $\mathcal{F}_{T_i^{[l]}}$ -可測な非負の確率変数列である。

**命題 2**  $\lambda_0 = \{\lambda_0^{[1]}, \lambda_0^{[2]}, \dots, \lambda_0^{[d]}\}$  が条件として与えられたとき, 条件付き 1 次モーメント  $E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0], E[N_t^{[j]} | \lambda_0]$  は以下の微分方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0] = \delta^{[j]}(a^{[j]} - E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]) \\ + \sum_{l=1}^d E[Y^{[j,l]}] E[\lambda_t^{[l]} | \lambda_0], \\ \frac{d}{dt} E[N_t^{[j]} | \lambda_0] = E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0].$$

## 3. CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation

### (1) シミュレーション全体の流れ

CIR 強度をもつ多変数ホークス過程は以下のプロセスで生成される。

1. 全体の  $i$  番目のイベント時刻  $T_i$  とその時刻における強度  $\{\lambda_{T_i}^{[j]}\}_{j=1,2,\dots,d}$  が与えられたもとで, 全体の  $i+1$  番目のイベント時間  $S_{i+1} = \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}\}$  を生成する。ただし,  $S_{i+1}^{[j]}$  は, 全体の  $i$  番目のイベント時間以降の  $j$  番目のホークス過程の最初のイベント時間を表す。
2. イベント時間  $S_{i+1}$  が与えられたもとで, 全体の  $i+1$  番目イベント到着直前時刻  $T_{i+1}^-$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]}$  を与える。ただし,  $T_{i+1} = T_i + S_{i+1}$  であり,  $S_{i+1} = S_{i+1}^{[l]}$  とする。
3. 各強度に対してジャンプ幅  $Y_{i+1}^{[j,l]}$  を与え, イベント時刻  $T_{i+1}$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}}^{[j]}$  を決定する。ただし,  $Y_i^{[j,l]}$  は  $l$  番目のホークス過程が  $j$  番目のホークス過程の強度に与える影響を表す。その後, 各計数過程  $N_{T_{i+1}}^{[j]}$  の値を更新する。

### (2) イベント時間 $S_{i+1}$ の Exact Simulation

**定理 3** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$  が与えられたとき, イベント時間  $S_{i+1}$  に対して以下が成り立つ。

$$S_{i+1} \stackrel{D}{=} \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}\}.$$

ただし,

$$S_{i+1}^{[j]} = \begin{cases} S^{[j]} \wedge V_{i+1}^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} > 0, \\ S^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} < 0, \end{cases} \\ d_{i+1}^{[j]} = \frac{1 + \frac{\ln U_3^{[j]}}{2\lambda_{T_i}^{[j]}}(\kappa^{[j]} + \delta^{[j]})}{1 - \frac{\ln U_3^{[j]}}{2\lambda_{T_i}^{[j]}}(\kappa^{[j]} - \delta^{[j]})}, \quad U_3^{[j]} \sim U[0, 1], \\ \kappa^{[j]} = \sqrt{\delta^{[j]2} + 2\sigma^{[j]2}}.$$

$S^{[j]}$  は以下の補題 4 で生成される。  $V_{i+1}^{[j]}$  は  $P(V_{i+1}^{[j]} = \infty) = \exp\left(-\frac{2}{\kappa^{[j]} + \delta^{[j]}} \lambda_{T_i}^{[j]}\right)$  をもつ不完全確率変数であり以下で生成される。

$$V_{i+1}^{[j]} = -\frac{1}{\kappa^{[j]}} \ln d_{i+1}^{[j]}, \quad d_{i+1}^{[j]} > 0.$$

**補題 4** (Dassios et al.[4] の Lemma 3.2.)

テール確率

$$P(S^{[j]} > s) = \left[ \frac{2\kappa^{[j]} e^{\frac{\kappa^{[j]} + \delta^{[j]}}{2}s}}{(\kappa^{[j]} + \delta^{[j]})(e^{\kappa^{[j]}s} - 1) + 2\kappa^{[j]}} \right]^{\frac{2a^{[j]}\delta^{[j]}}{\sigma^{[j]2}}}$$

で定義される確率変数  $S^{[j]}$  は, 次の棄却法によって生成される。

1. 一般化パレート分布  $W_g^{[j]}$  を以下の方法で生成する。

$$W_g^{[j]} = \frac{2\kappa^{[j]}}{\kappa^{[j]} + \delta^{[j]}} \left[ U_1^{[j] - \frac{\sigma^{[j]2}\kappa^{[j]}}{a^{[j]}\delta^{[j]}(\kappa^{[j]} - \delta^{[j])}} - 1 \right], \\ U_1^{[j]} \sim U(0, 1).$$

2.  $U_2^{[j]} \sim U(0, 1)$  を独立に生成する.

3. 生成した一様乱数  $U_2^{[j]}$  が

$$U_2^{[j]} \leq \left( \frac{W_g^{[j]} + 1}{\frac{2\kappa^{[j]}}{\kappa^{[j]} + \delta^{[j]}} + W_g^{[j]}} \right)^{\frac{a^{[j]}\delta^{[j]}(\kappa^{[j]} + \delta^{[j]})}{\sigma^{[j]2}\kappa^{[j]}}} \frac{W_g^{[j]}}{W_g^{[j]} + 1}$$

を満たすとき,

$$S^{[j]} = \frac{1}{\kappa^{[j]}} \ln(W_g^{[j]} + 1)$$

とする. そうでない場合は 1. へ戻る.

### (3) イベント直前時刻の強度 $\lambda_{T_{i+1}^-}$ の Exact Simulation

**定理 5** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$ , イベント時間  $S_{i+1} = s$  が与えられたとき, イベント直前時刻  $T_{i+1}^- = T_i + s^-$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]}$  は以下の分布にしたがう.

$$\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} \stackrel{D}{=} \begin{cases} \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]} + 1, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \text{with probability } \omega_{1s}^{[j]}, \\ \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]} + 2, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \text{with probability } \omega_{2s}^{[j]}, \\ \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]}, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \text{with probability } \omega_{3s}^{[j]}. \end{cases}$$

ただし,

$$\begin{aligned} J_s^{[j]} &\sim \text{Poisson}\left(\lambda_{T_i}^{[j]} \left( \frac{E_s^{[j]}}{B_s^{[j]}} - \frac{F_s^{[j]}}{C_s^{[j]}} \right)\right), \\ D^{[j]} &= \frac{2a^{[j]}\delta^{[j]}}{\sigma^{[j]2}}, \\ B_s^{[j]} &= \sigma^{[j]2}(e^{\kappa^{[j]}s} - 1), \\ C_s^{[j]} &= (\kappa^{[j]} - \delta^{[j]}) + (\kappa^{[j]} + \delta^{[j]})e^{\kappa^{[j]}s}, \\ E_s^{[j]} &= (\kappa^{[j]} + \delta^{[j]}) + (\kappa^{[j]} - \delta^{[j]})e^{\kappa^{[j]}s}, \\ F_s^{[j]} &= 2(e^{\kappa^{[j]}s} - 1), \\ \omega_{1s}^{[j]} &= \frac{\frac{D^{[j]}B_s^{[j]}}{C_s^{[j]}}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[l]}B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[l]}(E_s^{[l]} - F_s^{[l]})\frac{B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}}}{C_s^{[l]}}}, \\ \omega_{2s}^{[j]} &= \frac{\frac{\lambda_{T_i}^{[j]}(E_s^{[j]} - F_s^{[j]})\frac{B_s^{[j]}}{C_s^{[j]}}}{C_s^{[j]}}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[l]}B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[l]}(E_s^{[l]} - F_s^{[l]})\frac{B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}}}{C_s^{[l]}}}, \\ \omega_{3s}^{[j]} &= \frac{\sum_{l=1, l \neq j}^d \frac{D^{[l]}B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[l]}(E_s^{[l]} - F_s^{[l]})\frac{B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}}}{C_s^{[l]}}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[l]}B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[l]}(E_s^{[l]} - F_s^{[l]})\frac{B_s^{[l]}}{C_s^{[l]}}}{C_s^{[l]}}}. \end{aligned}$$

**注意 6** 種々の多変数ホークス過程  $\{N_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  の Exact Simulation では, 強度のサンプルパスをシミュレーションすることができずイベント時刻における強度のみ記録される. しかし, 強度のサンプルパスをシミュレーションできないことは, 種々の多変数ホークス過程  $\{N_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$  の Exact Simulation に対して影響を与えない.

### (4) イベント時刻の強度 $\lambda_{T_{i+1}^{[j]}}$ と計数過程 $N_{T_{i+1}^{[j]}}$ の Exact Simulation

各強度に対してジャンプ幅  $Y_i^{[j,l]}$  を与え, イベント時刻  $T_{i+1}$  における強度  $\lambda_{T_{i+1}^{[j]}}$  を

$$\lambda_{T_{i+1}^{[j]}}^{[j]} = \lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} + Y_{i+1}^{[j,l]}$$

により生成する. ただし,  $S_{i+1} = S_{i+1}^{[l]}$  であり,  $Y_{i+1}^{[j,l]}$  は  $j = l$  の場合自己励起ジャンプ幅,  $j \neq l$  の場合相互励起ジャンプ幅を表す. 各過程  $N_{T_{i+1}^{[j]}}$  の値を以下のように更新する.

$$N_{T_{i+1}^{[j]}}^{[j]} = \begin{cases} N_{T_{i+1}^-}^{[j]} + 1, & j = l, \\ N_{T_{i+1}^-}^{[j]}, & j \neq l. \end{cases}$$

## 4. Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程

Dassios et al.[5] を参考に, Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の定義と 1 次モーメントを与える.

**定義 7** (Jump-diffusion CIR 強度をもつホークス過程)

$j \in \{1, 2, \dots, d\}$  番目の Jump-diffusion CIR 強度をもつホークス過程は非負の  $\mathcal{F}_t$ -強度

$$\begin{aligned} \lambda_t^{[j]} &= a^{[j]} + (\lambda_0^{[j]} - a^{[j]})e^{-\delta^{[j]}t} + \int_0^t \sigma^{[j]}e^{-\delta^{[j]}(t-s)}\sqrt{\lambda_s^{[j]}}dW_s^{[j]} \\ &+ \sum_{l=1}^d \sum_{0 < T_i^{[l]} < t} Y_i^{[j,l]}e^{-\delta^{[j]}(t-T_i^{[l]})} + \sum_{0 < \tau_i^{[j]} < t} Z_i^{[j]}e^{-\delta^{[j]}(t-\tau_i^{[j]})} \end{aligned}$$

をもつ計数過程

$$N_t^{[j]} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}\{T_i^{[j]} \leq t\}$$

である. ただし,  $\mathcal{F}_t$ ,  $T_i^{[j]}$ ,  $a^{[j]} \geq 0$ ,  $\delta^{[j]} > 0$ ,  $\sigma^{[j]} > 0$ ,  $\{W_t^{[j]}\}_{t \geq 0, j=1,2,\dots,d}$ ,  $\{Y_i^{[j,l]}\}_{i=1,2,\dots}$  は定義 1 と同様であり,

- $\tau_i^{[j]}$  は定常強度  $\eta^{[j]}$  をもつ  $j$  番目の複合ポアソン過程の  $i$  番目のイベント到着時刻,
- $\{Z_i^{[j]}\}_{i=1,2,\dots}$  は密度関数  $H^{[j]}(z_j)$ ,  $z_j \geq 0$  をもつ  $\mathcal{F}_{\tau_i^{[j]}}$ -可測な非負の確率変数列である.

**命題 8**  $\lambda_0 = \{\lambda_0^{[1]}, \lambda_0^{[2]}, \dots, \lambda_0^{[d]}\}$  が条件として与えられたとき, 条件付き 1 次モーメント  $E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]$ ,  $E[N_t^{[j]} | \lambda_0]$  は以下の微分方程式を満たす.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0] &= \delta^{[j]}(a^{[j]} - E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]) \\ &+ \sum_{l=1}^d E[Y^{[j,l]}]E[\lambda_t^{[l]} | \lambda_0] + \eta^{[j]}E[Z^{[j]}], \\ \frac{d}{dt} E[N_t^{[j]} | \lambda_0] &= E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]. \end{aligned}$$

## 5. Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation

Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程は以下のプロセスで生成される.

1. 全体の  $i$  番目のイベント時刻  $T_i$  とその時刻における強度  $\{\lambda_{T_i}^{[j]}\}_{j=1,2,\dots,d}$  が与えられたもとで, 全体の  $i+1$  番目のイベント時間

$S_{i+1} = \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}, E_{i+1}^{[1]}, E_{i+1}^{[2]}, \dots, E_{i+1}^{[d]}\}$  を生成する。ただし、 $S_{i+1}^{[j]}$  は全体の  $i$  番目のイベント時間以降の  $j$  番目のホークス過程の最初のイベント時間を表し、 $E_{i+1}^{[j]}$  は全体の  $i$  番目のイベント時間以降の  $j$  番目の複合ポアソン過程の最初のイベント時間を表す。

2. イベント時間  $S_{i+1}$  が与えられたもとで、全体の  $i+1$  番目イベント到着直前時刻  $T_{i+1}^-$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]}$  を与える。ただし、 $T_{i+1} = T_i + S_{i+1}$  である。
3. 各強度に対してジャンプ幅  $Y_{i+1}^{[j,l]}$  ( $S_{i+1} = S_{i+1}^{[l]}$  の場合) または  $Z_{i+1}^{[j]}$  ( $S_{i+1} = E_{i+1}^{[j]}$  の場合) を与え、イベント時刻  $T_{i+1}$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}}^{[j]}$  を決定する。その後、各計数過程  $N_{T_{i+1}}^{[j]}$  の値を更新する。

#### (1) イベント時間 $S_{i+1}$ の Exact Simulation

**定理 9** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$  が与えられたとき、イベント時間  $S_{i+1}$  に対して以下が成り立つ。

$$S_{i+1} \stackrel{D}{=} \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}, E_{i+1}^{[1]}, E_{i+1}^{[2]}, \dots, E_{i+1}^{[d]}\}.$$

ただし、

$$S_{i+1}^{[j]} = \begin{cases} S^{[j]} \wedge V_{i+1}^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} > 0, \\ S^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} < 0, \end{cases}$$

$$d_{i+1}^{[j]} = \frac{1 + \frac{\ln U_3^{[j]}}{2\lambda_{T_i}^{[j]}}(\kappa^{[j]} + \delta^{[j]})}{1 - \frac{\ln U_3^{[j]}}{2\lambda_{T_i}^{[j]}}(\kappa^{[j]} - \delta^{[j]})}, \quad U_3^{[j]} \sim U[0, 1],$$

$$\kappa^{[j]} = \sqrt{\delta^{[j]2} + 2\sigma^{[j]2}}$$

であり、 $S^{[j]}$  は補題 4 によって生成される。 $V_{i+1}^{[j]}$  は以下で生成される。

$$V_{i+1} = -\frac{1}{\kappa^{[j]}} \ln d_{i+1}^{[j]}, \quad d_{i+1}^{[j]} > 0.$$

そして  $E = \min\{E_{i+1}^{[1]}, E_{i+1}^{[2]}, \dots, E_{i+1}^{[d]}\}$  は

$$E = -\frac{1}{\sum_{j=1}^d \eta^{[j]}} \ln U_4$$

で生成され、 $\min\{E_{i+1}^{[1]}, E_{i+1}^{[2]}, \dots, E_{i+1}^{[d]}\} = E_{i+1}^{[j]}$  は  $\frac{\eta^{[j]}}{\sum_{j=1}^d \eta^{[j]}}$  の確率で選ばれる。

#### (2) イベント直前時刻の強度 $\lambda_{T_{i+1}^-}$ の Exact Simulation

**定理 10** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$ 、イベント時間  $S_{i+1} = s$  が条件として与えられたとき、イベント直前時刻  $T_{i+1}^- = T_i + s^-$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]}$  は以下の分布にしたがう。

$$\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} \stackrel{D}{=} \begin{cases} \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]} + 1, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \quad \text{with probability } \omega_{1s}^*[j], \\ \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]} + 2, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \quad \text{with probability } \omega_{2s}^*[j], \\ \text{Gamma}(J_s^{[j]} + D^{[j]}, \frac{C_s^{[j]}}{B_s^{[j]}}), \\ \quad \text{with probability } \omega_{3s}^*[j]. \end{cases}$$

ただし、 $J_s^{[j]}, B^{[j]}, C^{[j]}, D^{[j]}, E^{[j]}, F^{[j]}$  は定理 5 と同様であり、

$$\omega_{1s}^*[j] = \frac{\frac{D^{[j]} B_s^{[j]}}{C_s^{[j]}}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[1l]} B_s^{[1l]}}{C_s^{[1l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[1]} (E_s^{[1]} - F_s^{[1]} \frac{B_s^{[1]}}{C_s^{[1]}})}{C_s^{[1]}} + \eta^{[1]}},$$

$$\omega_{2s}^*[j] = \frac{\frac{\lambda_{T_i}^{[j]} (E_s^{[j]} - F_s^{[j]} \frac{B_s^{[j]}}{C_s^{[j]}})}{C_s^{[j]}}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[1l]} B_s^{[1l]}}{C_s^{[1l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[1]} (E_s^{[1]} - F_s^{[1]} \frac{B_s^{[1]}}{C_s^{[1]}})}{C_s^{[1]}} + \eta^{[1]}},$$

$$\omega_{3s}^*[j] = \frac{\sum_{l=1, l \neq j}^d \left( \frac{D^{[1l]} B_s^{[1l]}}{C_s^{[1l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[1]} (E_s^{[1]} - F_s^{[1]} \frac{B_s^{[1]}}{C_s^{[1]}})}{C_s^{[1]}} \right) + \sum_{l=1}^d \eta^{[l]}}{\sum_{l=1}^d \frac{D^{[1l]} B_s^{[1l]}}{C_s^{[1l]}} + \frac{\lambda_{T_i}^{[1]} (E_s^{[1]} - F_s^{[1]} \frac{B_s^{[1]}}{C_s^{[1]}})}{C_s^{[1]}} + \eta^{[1]}}.$$

#### (3) イベント時刻の強度 $\lambda_{T_{i+1}}^{[j]}$ と計数過程 $N_{T_{i+1}}^{[j]}$ の Exact Simulation

各強度に対して以下のようにジャンプ幅を与え、イベント時刻  $T_{i+1}$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}}^{[j]}$  を決定する。

$$\lambda_{T_{i+1}}^{[j]} = \begin{cases} \lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} + Y_{i+1}^{[j,l]}, & S_{i+1} = S_{i+1}^{[l]}, \\ \lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} + Z_{i+1}^{[j]}, & S_{i+1} = E_{i+1}^{[j]}. \end{cases}$$

各計数過程  $N_{T_{i+1}}^{[j]}$  の値を以下のように更新する。

$$N_{T_{i+1}}^{[j]} = \begin{cases} N_{T_{i+1}^-}^{[j]} + 1, & S_{i+1} = S_{i+1}^{[j]}, \\ N_{T_{i+1}^-}^{[j]}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

### 6. 数値実験

#### (1) CIR 強度をもつ多変数ホークス過程：理論値とシミュレーション値の比較

3 変数 ( $d = 3$ ) の場合のシミュレーション結果を以下に示す。強度における励起ジャンプ幅は互いに独立な指数分布にしたがうとする。

$$Y_i^{[j,l]} \sim \text{Exp}(\beta^{[j,l]}), \quad j, l \in \{1, 2, 3\}.$$

ただし、 $E[Y_i^{[j,l]}] = \frac{1}{\beta^{[j,l]}}$  とする。パラメータを以下のように設定し、実験を行う。

$$a^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \lambda_0^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \delta^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{bmatrix}, \quad \beta^{[\cdot, \cdot]} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

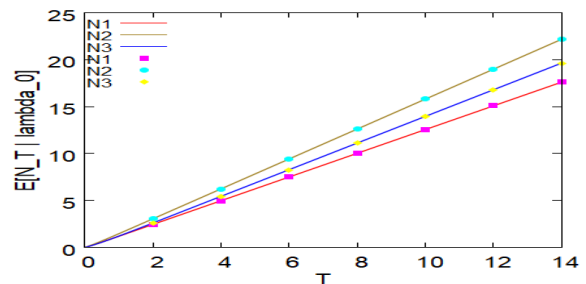


図 1 1 次モーメントの理論値とシミュレーション値

図 1 は CIR 強度をもつ多変数ホークス過程について、時刻  $T$  を動かしたときの各 1 次モーメント  $E[N_T^{[j]}|\lambda_0]$  の変化を表しており、理論結果とシミュレーション結果を比較している。点でプロットされたものがシミュレーション結果であり、モンテカルロ  $10^5$  サンプルでシミュレーションを行った。本論文では、その他の数値実験結果も与えている。

## (2) Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程：理論値とシミュレーション値の比較

3 変数 ( $d = 3$ ) の場合のシミュレーション結果を以下に示す。強度における励起ジャンプ幅は互いに独立な指数分布にしたがうとする。

$$Y_i^{[j,l]} \sim \text{Exp}(\beta^{[j,l]}), \quad Z_i^{[j]} \sim \text{Exp}(z^{[j]}), \quad j, l \in \{1, 2, 3\}.$$

ただし、 $E[Y_i^{[j,l]}] = \frac{1}{\beta^{[j,l]}}$ ,  $E[Z_i^{[j]}] = \frac{1}{z^{[j]}}$  とする。そして、各ホークス過程のパラメータを以下のように設定し、実験を行う。

$$a^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \lambda_0^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad \delta^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \sigma^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{bmatrix},$$

$$\beta^{[\cdot,\cdot]} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \eta^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

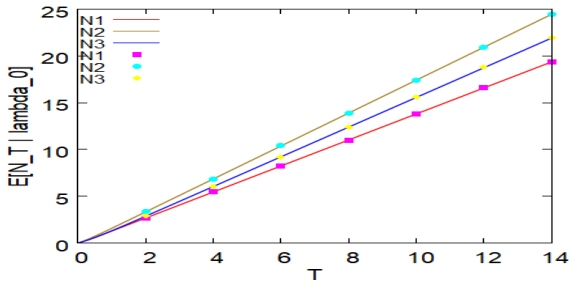


図 2 1 次モーメントの理論値とシミュレーション値

図 2 は Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程について、時刻  $T$  を動かしたときの各 1 次モーメント  $E[N_T^{[j]}|\lambda_0]$  の変化を表しており、理論結果とシミュレーション結果を比較している。点でプロットされたものがシミュレーション結果であり、モンテカルロ  $10^5$  サンプルでシミュレーションを行った。本論文では、その他の数値実験結果も与えている。

## 7. Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程

Qu et al.[7] を参考に、Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程の定義と 1 次モーメントを与える。

**定義 11** (Non-Gaussian 強度をもつホークス過程)

$j \in \{1, 2, \dots, d\}$  番目の Non-Gaussian 強度をもつホークス過程は非負の  $\mathcal{F}_t$ -強度

$$\lambda_t^{[j]} = a^{[j]} + (\lambda_0^{[j]} - a^{[j]})e^{-\delta^{[j]}t} + \rho^{[j]} \int_0^t e^{-\delta^{[j]}(t-s)} dZ_s^{[j]} + \sum_{l=1}^d \sum_{0 < T_i^{[l]} < t} Y_i^{[j,l]} e^{\delta^{[j]}(t-T_i^{[l]})}$$

をもつ計数過程

$$N_t^{[j]} = \sum_{i \geq 1} \mathbf{1}\{T_i^{[j]} \leq t\}$$

である。ただし、 $\mathcal{F}_t$ ,  $T_i^{[j]}$ ,  $a^{[j]} \geq 0$ ,  $\delta^{[j]} > 0$ ,  $\{Y_i^{[j,l]}\}_{i=1,2,\dots}$  は定義 1 と同様であり

- $\rho^{[j]}$  は任意の正の定数,
- $Z_s^{[j]}$  は  $Z_0^{[j]} = 0$  をもつ  $j$  番目の subordinator (BDLP) である。

$j$  番目の BDLP の Lévy 測度を  $\nu^{[j]}$  で表し、ラプラス指数を以下で定義する。

$$\Phi^{[j]}(u) := \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) \nu^{[j]}(dy).$$

また、単位時間当たりの平均は以下のように定義される。

$$E[Z_1^{[j]}] := \int_0^\infty y \nu^{[j]}(dy).$$

**命題 12**  $\lambda_0 = \{\lambda_0^{[1]}, \lambda_0^{[2]}, \dots, \lambda_0^{[d]}\}$  が条件として与えられたとき、条件付き 1 次モーメント  $E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]$ ,  $E[N_t^{[j]} | \lambda_0]$  は以下の微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0] &= \delta^{[j]}(a^{[j]} - E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]) \\ &\quad + \sum_{l=1}^d E[Y^{[j,l]}] E[\lambda_t^{[l]} | \lambda_0] + \rho^{[j]} E[Z_1^{[j]}], \\ \frac{d}{dt} E[N_t^{[j]} | \lambda_0] &= E[\lambda_t^{[j]} | \lambda_0]. \end{aligned}$$

### (1) ガンマ過程ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程

ガンマ過程ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程は、Lévy 過程にガンマ過程を用いている。

**定義 13** (Qu et al.[7] Definition 4.1) 形状パラメータ  $\alpha_G$ , 尺度パラメータ  $\beta_G$  をもつガンマ分布  $\text{Gamma}(\alpha_G, \beta_G)$  は、以下の密度関数をもつ

$$f(s) = \frac{\beta_G^{\alpha_G}}{\Gamma(\alpha_G)} s^{\alpha_G-1} e^{-\beta_G s}.$$

ただし、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数を表す。ガンマ過程  $\{G_t, t \geq 0\}$  は、純粋なジャンプのみで構成される Lévy 過程であり、ガンマ分布にしたがう互いに独立な増分をもつ。とくに、 $G_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_G, \beta_G)$  を満たす。Lévy 測度は

$$\nu(ds) = \alpha_G s^{-1} e^{-\beta_G s} ds$$

で表現される。単位時間のガンマ過程  $Z_1$  の期待値は

$$E[Z_1] = \frac{\alpha_G}{\beta_G}$$

で与えられる。

### (2) Tempered Stable subordinator ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程

Tempered Stable subordinator ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程は、Lévy 過程に Tempered Stable subordinator を用いている。

**定義 14** (*Qu et al.[7] Definition 4.2*)

*Tempered stable* 分布 ( $TS(\alpha_{TS}, \beta_{TS}, \theta_{TS})$ ) は以下の *Lévy* 測度によって定義される無限分解可能分布である。

$$\nu(dy) = \frac{\theta_{TS}}{y^{\alpha_{TS}+1}} e^{-\beta_{TS}y} dy, \quad y \geq 0, \alpha \in (0, 1), \beta, \theta \in \mathbb{R}^+.$$

*Tempered Stable (TS) subordinator* は単位時間当たりの周辺分布  $Z_1 \sim TS(\alpha_{TS}, \beta_{TS}, \theta_{TS})$  をもつ *Lévy* 過程  $\{Z_t : t \geq 0\}$  である。単位時間の期待値は

$$E[Z_1] = \theta_{TS} \beta_{TS}^{\alpha_{TS}-1} \Gamma(1 - \alpha_{TS})$$

で与えられる。ただし、 $\alpha_{TS}$  は安定指標、 $\beta_{TS}$  は強度パラメータ、 $\theta_{TS}$  は傾斜パラメータである。

## 8. Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程の Exact Simulation

Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程は以下のプロセスで生成される。

1. 全体の  $i$  番目のイベント時刻  $T_i$  とその時刻における強度  $\{\lambda_{T_i}^{[j]}\}_{j=1,2,\dots,d}$  が与えられたもとで、全体の  $i+1$  番目のイベント時間  $S_{i+1} = \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}\}$  を生成する。ただし、 $S_{i+1}^{[j]}$  は、全体の  $i$  番目のイベント時間以降の  $j$  番目のホークス過程のイベント時間を表す。
2. イベント時間  $S_{i+1}$  が与えられたもとで、全体の  $i+1$  番目イベント到着直前時刻  $T_{i+1}^-$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]}$  を与える。ただし、 $T_{i+1} = T_i + S_{i+1}$  であり、 $S_{i+1} = S_{i+1}^{[l]}$  とする。
3. 各強度に対してジャンプ幅  $Y_{i+1}^{[j,l]}$  を与え、イベント時刻  $T_{i+1}$  における各強度  $\lambda_{T_{i+1}}^{[j]}$  を決定する。ただし、 $Y_i^{[j,l]}$  は  $l$  番目のホークス過程が  $j$  番目のホークス過程の強度に与える影響を表す。その後、各計数過程  $N_{T_{i+1}}^{[j]}$  の値を更新する。

### (1) イベント時間 $S_{i+1}$ の Exact Simulation

**定理 15** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$  が与えられたとき、イベント時間  $S_{i+1}$  に対して以下が成り立つ。

$$S_{i+1} \stackrel{D}{=} \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}\}.$$

ただし、

$$S_{i+1}^{[j]} = \begin{cases} S^{[j]} \wedge V_{i+1}^{[j]} \wedge X^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} > 0, \\ S^{[j]} \wedge X^{[j]}, & d_{i+1}^{[j]} < 0, \end{cases}$$

であり、

$$S^{[j]} = -\frac{1}{a} \ln U_1^{[j]}, \quad U_1^{[j]} \sim U[0, 1],$$

$$V_{i+1}^{[j]} = -\frac{1}{a^{[j]}} \ln d_{i+1}^{[j]}, \quad d_{i+1}^{[j]} := 1 + \frac{\delta^{[j]} \ln U_2^{[j]}}{\lambda_{T_i}^{[j]} - a^{[j]}}, \quad U_2^{[j]} \sim U[0, 1]$$

である。 $X^{[j]}$  は以下の強度を持つ非定常ポアソンの最初のイベント時間である。

$$\zeta^{[j]}(t) := \rho^{[j]} \Phi^{[j]}(G_0^{[j]}(t)), \quad G_0^{[j]}(t) := \frac{1 - e^{-\delta^{[j]}t}}{\delta^{[j]}}, \quad t \geq 0.$$

**アルゴリズム 16** (*Thinning* スキーム) 確率変数  $X^{[j]}$  は以下の手順で正確に生成される。

1. イベント時間の候補となる時間  $\tilde{t}$  を初期化する。  $\tilde{t} = 0$ .
2. パラメータ  $\zeta_\infty^{[j]}$  の指数分布にしたがう確率変数  $E^{[j]}$  を生成する。ただし

$$\zeta_\infty^{[j]} = \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta^{[j]}(t) = \rho^{[j]} \Phi^{[j]} \left( \frac{1}{\delta^{[j]}} \right)$$

である。その後  $\tilde{t}$  を更新する。  $\tilde{t} = \tilde{t} + E^{[j]}$ .

3. 一様乱数  $U^{[j]} \sim U(0, 1)$  を生成し、 $U^{[j]} \leq \frac{\zeta^{[j]}(t)}{\zeta_\infty^{[j]}}$  ならば、 $X^{[j]} = \tilde{t}$  とし、そうでない場合は 2. に戻る。

(a) イベント時間  $S_{i+1}$  の **Exact Simulation** : ガンマ過程ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程 イベント時間  $S_{i+1}$  の Exact Simulation はアルゴリズム 16 で与えられた *Thinning* スキームを通して生成される。アルゴリズム 16 で用いられる  $\zeta_\infty^{[j]}$  は以下で与えられる。

$$\zeta_\infty^{[j]} = \rho^{[j]} \alpha_G^{[j]} \ln \left( 1 + \frac{1}{\delta^{[j]} \beta_G^{[j]}} \right).$$

(b) イベント時間  $S_{i+1}$  の **Exact Simulation** : **Tempered Stable subordinator** ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程 イベント時間  $S_{i+1}$  の Exact Simulation はアルゴリズム 16 で与えられた *Thinning* スキームを通して生成される。アルゴリズム 16 で用いられる  $\zeta_\infty^{[j]}$  は以下で与えられる。

$$\zeta_\infty^{[j]} = -\rho^{[j]} \theta_{TS}^{[j]} \Gamma(-\alpha_{TS}^{[j]}) \left[ \left( \beta_{TS}^{[j]} + \frac{1}{\delta^{[j]}} \right) - \beta_{TS}^{[j]} \alpha_{TS}^{[j]} \right].$$

### (2) イベント直前時刻の強度 $\lambda_{T_{i+1}^-}$ の Exact Simulation

(a) イベント直前時刻の強度  $\lambda_{T_{i+1}^-}$  の **Exact Simulation** : ガンマ過程ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程

**定理 17** 強度  $\lambda_{T_i}^{[1]}, \lambda_{T_i}^{[2]}, \dots, \lambda_{T_i}^{[d]}$  が与えられ、イベント時間  $S_{i+1} = \min\{S_{i+1}^{[1]}, S_{i+1}^{[2]}, \dots, S_{i+1}^{[d]}\} = s$  が与えられたとき、各強度  $\lambda_{T_i+s-}^{[j]}$  は以下で正確に分解される。

$$\lambda_{T_i+s-}^{[j]} \mid \lambda_{T_i}^{[j]} \stackrel{D}{=} e^{-\delta^{[j]}s} \lambda_{T_i}^{[j]} + \tilde{\Gamma}^{[j]} + \tilde{B}^{[j]} \times S^{[j]} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}^{[j]}} S_k^{[j]}.$$

ただし、 $\tilde{\Gamma}^{[j]}, \tilde{B}^{[j]}, S^{[j]}, \tilde{N}^{[j]}, \{S_k^{[j]}\}_{k=1,2,\dots}$  は、互いに独立であり、 $\tilde{\Gamma}^{[j]}$  は、ガンマ分布

$$\tilde{\Gamma}^{[j]} \sim \text{Gamma} \left( -\frac{\alpha_G^{[j]} \rho^{[j]}}{\delta^{[j]}} \ln e^{-\delta^{[j]}s}, \frac{\theta^{[j]}}{e^{-\delta^{[j]}s}} - \frac{1}{\delta^{[j]}} \right),$$

$$\theta^{[j]} := \beta_G^{[j]} + \frac{1}{\delta^{[j]}}$$

にしたがう確率変数である。 $\tilde{B}^{[j]}$  は、確率  $p_1^{[j]}$  で 0 をとり、確率  $p_2^{[j]}$  で 1 をとるベルヌーイ分布であり、

$$p_1^{[j]} = \frac{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} \right) + \sum_{k=1, k \neq j}^d \frac{\alpha_G^{[k]} \rho^{[k]} C^{[k]}}{\delta^{[k]}}}{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} + \frac{\alpha_G^{[k]} \rho^{[k]} C^{[k]}}{\delta^{[k]}} \right)},$$

$$p_2^{[j]} = \frac{\frac{\alpha_G^{[j]} \rho^{[j]} C^{[j]}}{\delta^{[j]}}}{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} + \frac{\alpha_G^{[k]} \rho^{[k]} C^{[k]}}{\delta^{[k]}} \right)},$$

$$C^{[j]} := \delta^{[j]} \ln \left( \frac{\beta_G^{[j]} \delta^{[j]} + 1 - e^{-\delta^{[j]}s}}{\beta_G^{[j]} \delta^{[j]}} \right)$$

である。\$S^{[j]}\$ は指数分布

$$S^{[j]} \sim \text{Exp} \left( \theta^{[j]} W_0^{[j]} - \frac{1}{\delta^{[j]}} \right)$$

にしたがう確率変数である。ただし、\$W\_0^{[j]}\$ は以下で生成される確率変数である。

$$W_0^{[j]} = \left[ 1 - \beta_G^{[j]} \delta^{[j]} \left( e^{\frac{C^{[j]}}{\delta^{[j]} U_0^{[j]}}} - 1 \right) \right]^{-1}, U_0^{[j]} \sim U[0, 1].$$

\$\tilde{N}^{[j]}\$ はパラメータ \$\frac{\alpha\_G \rho^{[j]}}{\delta^{[j]}} \theta^{[j]} C\_w^{[j]}\$ のポアソン分布である。ただし、\$C\_w^{[j]}\$ は以下で定義される。

$$C_w^{[j]} := \int_1^{e^{\delta^{[j]}s}} \frac{\ln u}{\theta^{[j]} u - \frac{1}{\delta^{[j]}}} du.$$

\$\{S\_k^{[j]}\}\_{k=1,2,\dots}\$ は独立同分布の指数分布 \$\text{Exp}(\theta^{[j]} W^{[j]} - \frac{1}{\delta^{[j]}})\$ にしたがう。\$W^{[j]}\$ の生成方法は本論文で与えている。

(b) イベント直前時刻の強度 \$\lambda\_{T\_{i+1}^-}\$ の **Exact Simulation : Tempered Stable subordinator** ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程

**定理 18** 強度 \$\lambda\_{T\_i}^{[1]}, \lambda\_{T\_i}^{[2]}, \dots, \lambda\_{T\_i}^{[d]}\$ が与えられ、イベント時間 \$S\_{i+1} = \min\{S\_{i+1}^{[1]}, S\_{i+1}^{[2]}, \dots, S\_{i+1}^{[d]}\} = s\$ が与えられたとき、各強度 \$\lambda\_{T\_i+s^-}^{[j]}\$ は以下で正確に分解される。

$$\lambda_{T_i+s^-}^{[j]} | \lambda_{T_i}^{[j]} \stackrel{D}{=} e^{-\delta^{[j]}s} \lambda_{T_i}^{[j]} + \tilde{T}S^{[j]} + \tilde{B}^{[j]} \times S^{[j]} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}^{[j]}} S_k^{[j]}.$$

ただし、\$\tilde{T}S^{[j]}, \tilde{B}^{[j]}, S^{[j]}, \tilde{N}^{[j]}, \{S\_k^{[j]}\}\_{k=1,2,\dots}\$ は、互いに独立であり、\$\tilde{T}S^{[j]}\$ は以下の *Tempered Stable* 分布にしたがう確率変数である。

$$\tilde{T}S^{[j]} \sim TS \left( \alpha_{TS}^{[j]}, \frac{\psi^{[j]}}{e^{-\delta^{[j]}s}} - \frac{1}{\delta^{[j]}}, \frac{\theta_{TS}^{[j]} \rho^{[j]}}{\alpha_{TS}^{[j]} \delta^{[j]}} (1 - e^{-\delta^{[j]} \alpha_{TS}^{[j]} s}) \right),$$

$$\psi^{[j]} := \beta_{TS}^{[j]} + \frac{1}{\delta^{[j]}}.$$

\$\tilde{B}^{[j]}\$ は確率 \$p\_1^{[j]}\$ で 0 をとり、確率 \$p\_2^{[j]}\$ で 1 をとるベルヌーイ分布にしたがう確率変数である。ただし

$$p_1^{[j]} = \frac{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} \right)}{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} + \sum_{k=1, k \neq j}^d \frac{\theta_{TS}^{[k]} \rho^{[k]} D^{[k]}}{\delta^{[k]}} \Gamma(1 - \alpha_{TS}^{[k]}) + \frac{\theta_{TS}^{[j]} \rho^{[j]} D^{[j]}}{\delta^{[j]}} \Gamma(1 - \alpha_{TS}^{[j]}) \right)},$$

$$p_2^{[j]} = \frac{\frac{\theta_{TS}^{[j]} \rho^{[j]} D^{[j]}}{\delta^{[j]}} \Gamma(1 - \alpha_{TS}^{[j]})}{\sum_{k=1}^d \left( a^{[k]} + (\lambda_{T_i}^{[k]} - a^{[k]})e^{-\delta^{[k]}s} + \frac{\theta_{TS}^{[k]} \rho^{[k]} D^{[k]}}{\delta^{[k]}} \Gamma(1 - \alpha_{TS}^{[k]}) \right)},$$

$$D^{[j]} := \frac{\delta^{[j]}}{\alpha_{TS}^{[j]}} \left[ \left( \psi^{[j]} - \frac{e^{-\delta^{[j]}s}}{\delta^{[j]}} \right)^{\alpha_{TS}^{[j]}} - \beta_{TS}^{[j]} \alpha_{TS}^{[j]} \right].$$

\$S^{[j]}\$ は以下のガンマ分布にしたがう確率変数である。

$$S^{[j]} \sim \text{Gamma}(1 - \alpha_{TS}^{[j]}, \psi^{[j]} V_0^{[j]} - \frac{1}{\delta^{[j]}}),$$

$$V_0^{[j]} = \left[ \delta^{[j]} \beta_{TS}^{[j]} + 1 - \delta^{[j]} \left( \frac{\alpha_{TS}^{[j]} D^{[j]}}{\delta^{[j]}} U^{[j]} + \beta_{TS}^{[j]} \alpha_{TS}^{[j]} \right)^{\frac{1}{\alpha_{TS}^{[j]}}} \right]^{-1},$$

$$U_0^{[j]} \sim U[0, 1].$$

\$\tilde{N}^{[j]}\$ はパラメータ \$\frac{\theta\_{TS}^{[j]} \rho^{[j]}}{\alpha\_{TS}^{[j]} \delta^{[j]}} \psi^{[j]} \Gamma(1 - \alpha\_{TS}^{[j]}) D\_w^{[j]}\$ のポアソン分布である。ただし、

$$D_w^{[j]} := \int_1^{e^{\delta^{[j]}s}} \frac{1 - u^{-\alpha_{TS}^{[j]}}}{(\psi^{[j]} u - \frac{1}{\delta^{[j]}})^{1 - \alpha_{TS}^{[j]}}} du.$$

\$\{S\_k^{[j]}\}\_{k=1,2,\dots}\$ は独立同分布の \$\text{Gamma}(1 - \alpha\_{TS}^{[j]}, \psi^{[j]} V^{[j]} - \frac{1}{\delta^{[j]}})\$ にしたがう。\$V^{[j]}\$ の生成方法は本論文で与えている。

### (3) イベント時刻の強度 \$\lambda\_{T\_{i+1}^-}\$ と計数過程 \$N\_{T\_{i+1}}^{[j]}\$ の **Exact Simulation**

各強度に対してジャンプ幅 \$Y\_i^{[j,l]}\$ を与え、イベント時刻 \$T\_{i+1}\$ における強度 \$\lambda\_{T\_{i+1}}^{[j]}\$ を

$$\lambda_{T_{i+1}}^{[j]} = \lambda_{T_{i+1}^-}^{[j]} + Y_{i+1}^{[j,l]}$$

により生成する。ただし、\$S\_{i+1} = S\_{i+1}^{[l]}\$ であり、\$Y\_i^{[j,l]}\$ は \$j=l\$ の場合自己励起ジャンプ幅、\$j \neq l\$ の場合相互励起ジャンプ幅を表す。各過程 \$N\_{T\_{i+1}}^{[j]}\$ の値を以下のように更新する。

$$N_{T_{i+1}}^{[j]} = \begin{cases} N_{T_{i+1}^-}^{[j]} + 1, & j = l, \\ N_{T_{i+1}^-}^{[j]}, & j \neq l. \end{cases}$$

## 9. 数値実験

### (1) ガンマ過程ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程：理論値とシミュレーション値の比較

3 変数 (\$d=3\$) の場合のシミュレーション結果を以下に示す。強度における励起ジャンプ幅は互いに独立な指数分布にしたがうとする。

$$Y_i^{[j,l]} \sim \text{Exp}(\beta^{[j,l]}), \quad j, l \in \{1, 2, 3\}.$$

ただし、\$E[Y\_i^{[j,l]}] = \frac{1}{\beta^{[j,l]}}\$ とする。そして、各ホークス過程のパラメータを以下のように設定する。

$$a^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1.1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_0^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \delta^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \alpha_G^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{bmatrix},$$

$$\beta_G^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \rho^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta^{[\cdot,\cdot]} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

図 3 はガンマ過程ベースの **Non-Gaussian** 強度をもつ多変数ホークス過程について、時刻 \$T\$ を動かしたときの各 1



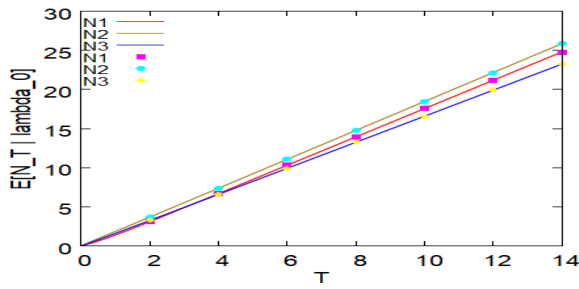


図 3 1 次モーメントの理論値とシミュレーション値

次モーメント  $E[N_T^{[j]} | \lambda_0]$  の変化を表しており、理論結果とシミュレーション結果を比較している。点でプロットされたものがシミュレーション結果であり、モンテカルロ  $10^5$  サンプルでシミュレーションを行った。本論文では、その他の数値実験結果も与えている。

## (2) Tempered Stable subordinator ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程：理論値とシミュレーション値の比較

3 変数 ( $d = 3$ ) の場合のシミュレーション結果を以下に示す。強度における励起ジャンプ幅は互いに独立な指数分布にしたがうとする。

$$Y_i^{[j,l]} \sim \text{Exp}(\beta^{[j,l]}), j, l \in \{1, 2, 3\}.$$

ただし、 $E[Y_i^{[j,l]}] = \frac{1}{\beta^{[j,l]}}$  とする。そして、各ホークス過程のパラメータを以下のように設定する。

$$\begin{aligned} a^{[\cdot]} &= \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1 \\ 1.1 \end{bmatrix}, \lambda_0^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 1.1 \\ 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \delta^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 3.1 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ \alpha_{TS}^{[\cdot]} &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \beta_{TS}^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \theta_{TS}^{[\cdot]} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \\ \rho^{[\cdot]} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta^{[\cdot,\cdot]} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

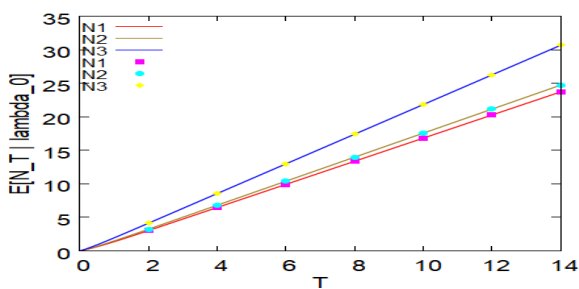


図 4 1 次モーメントの理論値とシミュレーション値

図 4 は Tempered Stable subordinator ベースの Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程について、時刻  $T$  を動かしたときの各 1 次モーメント  $E[N_T^{[j]} | \lambda_0]$  の変化を表しており、理論結果とシミュレーション結果を比較している。点でプロットされたものがシミュレーション結果であり、モンテカルロ  $10^5$  サンプルでシミュレーションを行った。本論文では、その他の数値実験結果も与えている。

## 10. おわりに

本紀要では、CIR 強度をもつ多変数ホークス過程、Jump-diffusion CIR 強度をもつ多変数ホークス過程、Non-

Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程の定義を与え、Exact Simulation を紹介した。Non-Gaussian 強度をもつ多変数ホークス過程に関しては、強度に追加される Lévy 過程に対してガンマ過程と Tempered Stable subordinator を採用し、それぞれの Exact Simulation を与えた。また数値実験では、1 次モーメントの理論値とシミュレーション値を比較することでシミュレーション方法の妥当性を確認した。本論文では、数値実験としてその他に 2 次モーメントの理論値とシミュレーションの比較や、1 次、2 次モーメントの誤差、相対誤差を計算し妥当性を確認している。加えて、Exact Simulation の比較対象としてそれぞれの確率過程における離散スキームを紹介し、実験結果を比較している。数値実験では、CIR 強度をもつ多変数ホークス過程と Jump-diffusion CIR 強度を持つ多変数ホークス過程の Exact Simulation において、強度が大きくなるようにパラメータ設定を行うと、計算効率が著しく低下するという問題が生じる。強度が大きいときの計算効率の問題に対する有効な代替手段として、離散スキームが挙げられる。離散スキームによる具体的な数値実験結果は本論文で与えている。また、離散スキームは強度のサンプルパスをシミュレーションすることができるという利点をもつ。

本研究ではその他に、シミュレーションを用いた応用例として保険分野の破産確率や累積クレーム額の分布関数を与えている。ファイナンスにおいても、企業のデフォルト損失モデルとして、本論文で紹介した確率過程を用いることができる。

今後の課題として、応用する分野に対する各種ホークス過程の選択、パラメータの推定がある。種々のホークス過程はそれぞれに異なる特徴をもっているため、現実の事象に、よりフィットするモデルを選ぶことが重要である。また、パラメータの数が膨大となるため、パラメータの推定をどのように行うかということも重要となる。

## 参考文献

- 1) O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), Vol.63, pp.167-241, 2001.
- 2) A. Dassios, H. Zhao, *Exact simulation of Hawkes process with exponentially decaying intensity*, Electronic Communications in Probability, Vol.13, pp.1-13, 2011.
- 3) A. Dassios, H. Zhao, *A dynamic contagion process*, Advances in Applied Probability, Vol.43, pp.814-846, 2011.
- 4) A. Dassios, H. Zhao, *Efficient simulation of clustering jumps with CIR intensity*, Operations Research, Vol.65, pp.1494-1515, 2017.
- 5) A. Dassios, H. Zhao, *A generalised contagion process with an application to credit risk*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol.20, pp.1-33, 2017.
- 6) A. G. Hawkes, *Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes*, Biometrika, Vol.58, pp.83-90, 1971.
- 7) Y. Qu, A. Dassios, H. Zhao, *Efficient simulation of Lévy-driven point processes*, Advances in Applied Probability, Vol.51, pp.927-966, 2019.